

Управление в социально-экономических системах

© 2024 г. М.И. ГЕРАСЬКИН, д-р экон. наук (innovation@ssau.ru)
(Самарский национальный исследовательский университет
им. академика С.П. Королева)

ОБЪЕМНЫЕ ПРЕДПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ВАРИАЦИИ В ИГРАХ ОЛИГОПОЛИИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ФУНКЦИЯХ СПРОСА И ИЗДЕРЖЕК И МНОГОУРОВНЕВОМ ЛИДЕРСТВЕ

Рассматривается некооперативная игра объемной конкуренции фирм на рынке олигополии для случая функций спроса и издержек общего вида. Оптимальное реагирование каждой фирмы на стратегии других фирм оценивается по величине и знаку предположительной вариации, которая выражает предположение фирмы об изменении объема предложения контрагента в ответ на единичное изменение объема предложения данной фирмы. Исследуется игра n фирм, в которой обобщенной характеристикой реагирования является сумма предположительных вариаций относительно всех контрагентов. Выявлено существование бифуркации реагирования игроков, т.е. игровой ситуации, в которой возможно как положительное, так и отрицательное реагирование с бесконечной по величине суммой вариаций. Разработаны методы расчета суммы предположительных вариаций для различных видов обратной функции спроса (линейной и степенной) и функций издержек (линейных, степенных, квадратичных), на основе которых проведен сравнительный анализ влияния этих характеристик фирм на состояние бифуркации.

Ключевые слова: олигополия, предположительная вариация, бифуркация, лидерство по Штакельбергу.

DOI: 10.31857/S0005231024070065, EDN: XRKSAU

1. Введение

В игре олигополии игроки-фирмы выдвигают предположения о стратегиях других игроков, т.е. окружения, на которых базируют свое оптимальное реагирование на эти стратегии. В случае объемной конкуренции предположения фирм формализованы в виде объемных предположительных вариаций [1]. Этот случай зачастую рассматривают исследователи [2] в связи с тем, что объемная конкуренция предпочтительнее, так как приводит к меньшему выпуску, более высоким ценам и большей прибыли, чем ценовая [3]. Предположительная вариация (здесь и далее рассматривается объемная предположительная вариация) представляет собой предполагаемое фирмой-игроком

изменение объема предложения контрагента в ответ на единичное изменение объема предложения данной фирмы. В теории олигополии принято рассматривать оптимальную (в зарубежной литературе consistent – совместимая [4]) предположительную вариацию, которая вычислена из необходимого условия оптимальности игрока, т.е. соответствует его наилучшему ответу. Другими словами, информированность о предположительной вариации в условиях неинформированности о модели выбора стратегии игрока (его функции полезности) позволяет предсказать поведение игрока.

Кроме того, игрок, оценивая предположительные вариации, может предполагать, что контрагент также оценивает его, т.е. исходит из оптимальности поведения первого. В этом случае контрагента называют лидером по Штакельбергу, а первого игрока – ведомым. Однако аналогично может рассуждать и контрагент, для которого упомянутый игрок будет лидером, а контрагент, вычисляющий предположительную вариацию из оптимальной реакции лидера, становится лидером второго уровня. Представленная последовательность рассуждений игроков называется стратегической рефлексией. Таким образом, анализ предположительных вариаций неизбежно приводит к проблеме многоуровневого лидерства [5]. Следовательно, вектор предположительных вариаций всех игроков является комплексной характеристикой игровой ситуации при данных ментальных профилях фирм, учитывая, что предположительные вариации являются функциями роли каждого игрока в иерархии многоуровневого лидерства.

В игре олигополии n лиц при $n > 2$ игровое поведение фирмы определяется суммой предположительных вариаций (СПВ) этого игрока относительно всех игроков окружения. В случае, если СПВ игрока отрицательна, то его оптимальной стратегией будет увеличение объема предложения, и наоборот. Поэтому в игре n лиц информированность обо всех компонентах вектора предположительных вариаций всех игроков не является обязательной для предсказания исхода игры, а достаточно знания компонентов вектора СПВ всех игроков. Безусловно, для определения вектора СПВ необходима информированность о функциях полезности игроков, однако если для типовых функций полезности найдены пределы и показан характер изменения СПВ, то создается информационная база для предсказания пределов исхода игры.

Типичные функции полезности задаются набором функций спроса и функций издержек [5–19]. В исследованиях олигополии наиболее часто встречаются такие обратные функции спроса, как линейная функция [5, 6, 9–15] и степенная функция [5, 16–19]. Набор функций, моделирующих затраты олигополистов, несколько шире: линейная функция [10, 12–14, 16, 18], степенная функция [6, 17], квадратичная функция [5, 7–9, 11, 15, 19]. Очевидно, что в подавляющем большинстве публикаций исследователи базируются на линейных моделях спроса и издержек, поскольку в этом случае легко вычислить предположительные вариации из функций наилучших ответов (функций реакций), которые представимы в явном виде. Степенная функция издержек

при различных значениях показателя степени может быть как выпуклой, так и вогнутой; вогнутая функция издержек соответствует положительному эффекту расширения масштаба, тогда как выпуклая – отрицательному. Квадратичная функция издержек применяется только для описания отрицательного эффекта расширения масштаба в выпуклом случае, так как в противном случае возможен переход к убывающей зависимости издержек от выпуска, что не соответствует экономическим реалиям.

Таким образом, анализ характера и пределов изменения СПВ вследствие изменения профиля рефлексивных предположений фирм в условиях многообразия функций полезности игроков представляет актуальную задачу оценивания поведения фирм в игре олигополии

2. Формулировка модели игры олигополии

Рассмотрим объемную монопродуктовую конкуренцию олигополии n фирм ($n > 2$) при общей для всех фирм обратной функции спроса $P(Q)$, убывающей по суммарному предложению продукта Q , и в случае функций издержек фирм $C_i(Q_i)$, которые не убывают по предложению i -й фирмы.

Допустим возможность рефлексии для каждого игрока (фирмы), которая задается рангом рефлексии r . Рефлексивное поведение игрока выражается в выдвигании им некоторых представлений о стратегиях окружения (остальных игроков), что приводит к появлению в игре представляемых или фантомных игроков [20]. При этом ранг рефлексии является числовой характеристикой таких представлений, а последовательность рангов задает следующую иерархию представляемых игроков:

- на ранге $r = 1$ игрок информирован о том, что окружение не информировано о его стратегии, т.е. игроки окружения являются последователями (ведомыми), а данный игрок приобретает статус лидера по Штакельбергу первого уровня;

- на ранге $r = 2$ по информации игрока его окружают лидеры по Штакельбергу первого уровня, следовательно, рассматриваемый игрок переходит в статус лидера по Штакельбергу второго уровня;

- на произвольном ранге r игроку известно, что игроки окружения имеют статус лидеров $(r - 1)$ -го уровня, тогда игрок имеет статус лидера r -го уровня.

Таким образом, реальная игра фирм на рынке олигополии далее рассматривается как информационная игра фантомных игроков, каждый из которых может находиться на различных уровнях лидерства в зависимости от степени его информированности, поэтому такую ситуацию принято называть многоуровневым лидерством (multiple leader-follower game) [5], а уровни лидерства задаются рангом r .

Игра с многоуровневым лидерством представляет собой кортеж следующего вида:

$$\Gamma = \langle N, \{Q_i, i \in N\}, \{\Pi_i, i \in N\}, \{r_i, i \in N\} \rangle,$$

где $N = \{1, \dots, n\}$ – множество игроков, $\{Q_i, i \in N\}$ вектор действий игроков, $\{\Pi_i, i \in N\}$ – вектор функций полезности игроков, $\{r_i, i \in N\}$ – вектор рангов игроков.

Функция полезности i -го игрока имеет вид

$$\Pi_i(Q, Q_i) = P(Q)Q_i - C_i(Q_i).$$

Дифференцируя функции полезности игроков, определим систему необходимых условий равновесия Нэша:

$$(1) \quad P(Q) + (1 + S_i^r)Q_i P'_Q - C'_{iQ_i} = 0, \quad i \in N,$$

где $S_i^r = \sum_{j \in N \setminus i} Q'_{j(r)Q_i}$ – сумма предположительных вариаций i -го игрока на r -м ранге рефлексии, каждый компонент которой Q'_{jQ_i} есть предположительная вариация i -го игрока, т.е. предполагаемое им изменение выпуска j -го игрока в ответ на единичный прирост выпуска i -го игрока; величина $Q'_{jQ_i} = \rho_{ij}^r$ вычисляется дифференцированием уравнения (1) для j -го игрока, что подтверждает ее оптимальность.

Условие существования равновесия в рассматриваемой игре, т.е. такого решения системы (1), которое доставляет максимумы функциям полезностям $\Pi_i(Q, Q_i)$ игроков, доказано В. Новшеком [21]

$$P'_Q + P''_{QQ}Q < 0$$

и зависит от вида функций спроса: для линейной и экспоненциальной функций спроса это условие выполняется, а при степенной функции спроса – нет, тогда для существования равновесия требуется условие неубывания функций издержек $C'_{iQ_i} \geq 0$.

Решение системы (1) можно найти, если известны СПВ всех игроков S_i^r , для вычисления которых была выведена [6] рекуррентная формула на произвольном ранге рефлексии:

$$(2) \quad S_i^r = \left(\frac{1}{\sum_{j \in N \setminus i} \frac{1}{u_j - S_j^{r-1} + 1}} - 1 \right)^{-1}.$$

Согласно (2) СПВ игрока зависит от двух характеристик игроков окружения:

- ментальных типов игроков, определяемых значениями их СПВ на предыдущем ранге рефлексии S_j^{r-1} ;
- технологических типов, связанных с видом функций издержек игроков окружения, задаваемых параметрами u_j ; для некоторых видов функций

спроса (если $P''_{QQ_i} \neq 0$, как будет показано далее) этот параметр также учитывает ментальный тип игрока.

Отметим, что формула (2) представлена для не зависящих от действий игроков предположительных вариаций, т.е. при $\rho'_{ijQ_i} = 0$, а в [6] описан более общий случай $\rho'_{ijQ_i} \neq 0$. Также было показано [6], что предположительные вариации слабо зависят от объемов предложения игроков, т.е. $\rho'_{ijQ_i} \approx 0$. В дальнейшем эта предпосылка будет обоснована для исследуемых функций спроса и издержек, а также показано, что наибольшее влияние на СПВ игрока оказывают СПВ и типы функций спроса и издержек окружения.

Утверждение 1. В (2) параметр u_i вычисляется по формуле:

$$(2a) \quad u_i = -1 + \frac{P'_{Q_i} + (1 + S_i^{r-1})Q_i P''_{QQ_i} - C''_{iQ_i Q_i}}{|P'_{Q_i}|}.$$

В дальнейшем будем называть u_i *коэффициентом нелинейности*, поскольку он характеризует влияние нелинейности функций спроса и издержек на тип уравнения (1) i -го игрока, так как при $u_i = -2$ соответствующее уравнение системы (1) является линейным.

Таким образом, из (1) следует, что вычисление равновесия в игре напрямую зависит от значения СПВ, которое, как вытекает из (2), предопределено особенностями функций $P(Q)$ и $C_i(Q_i)$. Поэтому исследуем возможные значения СПВ при различных вариантах сочетания этих функций.

3. Результаты

3.1. Методы вычисления предположительных вариаций

В дальнейшем, если индекс игрока i не имеет значения, опустим его и будем обозначать действие игрока символом $q = Q_i \forall i \in N$. Рассмотрим следующие обратные функции спроса:

$$(3a) \quad P_1(Q) = a - bQ, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad a \gg b,$$

$$(3б) \quad P_2(Q) = AQ^\alpha, \quad A > 0, \quad \alpha < 0, \quad |\alpha| < 1,$$

и функции издержек

$$(4a) \quad C_1(q) = B_0 + B_1q, \quad B_0 \geq 0, \quad B_1 > 0,$$

$$(4б) \quad C_2(q) = B_0 + B_1q^\beta, \quad B_0 \geq 0, \quad B_1 > 0, \quad \beta \in (0, 2),$$

$$(4в) \quad C_3(q) = B_0 + B_1q + \frac{B_2}{2}q^2, \quad B_0 \geq 0, \quad B_1, B_2 > 0,$$

где a, b, A, α – постоянные коэффициенты функций спроса, B_0, B_1, B_2, β – постоянные коэффициенты функций издержек.

Здесь введены обозначения типов функций: $P_k(Q)$, $k = 1, 2$ – функция спроса k -го типа ($k = 1$ – линейная функция, $k = 2$ – степенная функция); $C_m(q)$, $m = 1, 2, 3$ – функция издержек m -го типа ($m = 1$ – линейная функция, $m = 2$ – степенная функция, $m = 3$ – квадратичная функция).

Для формулы (2) выведем выражения P'_Q , P'_q , P''_{Qq} , C''_{qq} при (3), (4):

$$(5a) \quad P'_{1Q} = P'_{1q} = -b, \quad P''_{1Qq} = 0,$$

$$(5b) \quad P'_{2Q} = P'_{2q} = A\alpha Q^{\alpha-1}, \quad P''_{2Qq} = A\alpha(\alpha-1)Q^{\alpha-2},$$

$$(5в) \quad C''_{1qq} = 0, \quad C''_{2qq} = B_1\beta(\beta-1)q^{\beta-2}, \quad C''_{3qq} = B_2.$$

В результате параметры u_{km} , $k = 1, 2$, $m = 1, 2, 3$ для функций (3), (4) имеют вид:

$$(6a) \quad u_{11} = -2, \quad u_{21} = -2 + (1 + S^{r-1})(1 - \alpha)\frac{q}{Q},$$

$$(6b) \quad u_{12} = -2 - \frac{B_1}{b}\beta(\beta-1)q^{\beta-2},$$

$$u_{22} = -2 + (1 + S^{r-1})(1 - \alpha)\frac{q}{Q} - \frac{B_1}{A|\alpha|Q^{\alpha-1}}\beta(\beta-1)q^{\beta-2},$$

$$(6в) \quad u_{13} = -2 - \frac{B_2}{b}, \quad u_{23} = -2 + (1 + S^{r-1})(1 - \alpha)\frac{q}{Q} - \frac{B_2}{A|\alpha|Q^{\alpha-1}}.$$

Отметим, что в (6) параметр B_1 соответствует только случаю степенной функции.

3.2. Сравнительный анализ предположительных вариаций

Введем обозначение $s_i^r = \sum_{j \in N \setminus i} \frac{1}{u_j - S_j^{r-1} + 1}$, при котором (2) упрощается:

$$(7) \quad S_i^r = \left(\frac{1}{s_i^r} - 1 \right)^{-1},$$

где s_i^r выражает *агрегат* функций издержек и СПВ окружения, т.е. обобщенную характеристику технологических и ментальных типов игроков окружения.

Анализ формулы (7) показывает существование разрыва второго рода (рис. 1) функции $S_i^r(u_j, S_j^{r-1})$ при условии

$$(7a) \quad s_i^r = \sum_{j \in N \setminus i} \frac{1}{u_j - S_j^{r-1} + 1} = 1,$$

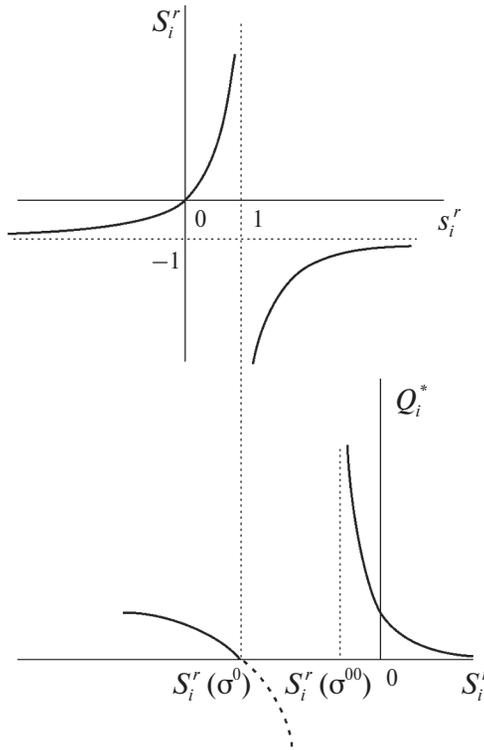


Рис. 1. Зависимость СПВ i -го игрока от агрегата функций издержек и СПВ окружения (вверху), зависимость равновесного действия i -го игрока от СПВ (внизу).

причем при $s_i^r \rightarrow 1 - 0$ эта функция принимает бесконечно большие положительные значения, а при $s_i^r \rightarrow 1 + 0$ – отрицательные. Функция $s_i^r(u_j, S_j^{r-1})$ имеет разрыв второго рода при $S_j^{r-1} = u_j + 1 \forall j \in N \setminus i$, который не приводит к разрыву функции $S_i^r(u_j, S_j^{r-1})$.

Разрыв второго рода функции $S_i^r(u_j, S_j^{r-1})$ содержательно означает, что в точке разрыва $(u_j^0, S_j^{0,r-1})$, $j \in N \setminus i$ игрок i на r -м ранге рефлексии может одновременно иметь два значения СПВ ($+\infty$ и $-\infty$). Если рассматривать последовательную рефлексию игроков относительно поведения друг друга как динамический процесс на числовой последовательности рангов $r = 1, 2, \dots$, то по аналогии с решениями некоторых дифференциальных уравнений можно говорить, что здесь наблюдается бифуркация представлений игрока. В этом случае *состояние бифуркации представлений* игрока i – это такое сочетание технологических типов игроков окружения, заданных их функциями издержек, и ментальных типов игроков окружения, выражаемых их уровнями лидерства (численно заданных в виде СПВ), при котором игрок i одновременно может предполагать бесконечно большие как положительные, так и отрицательные реакции (т.е. СПВ) окружения.

Функция (7), представленная на рис. 1 (вверху), позволяет оценить следующие интервалы изменения СПВ:

$$(76) \quad S_i^r = \begin{cases} \in [-1, 0), & \text{если } s_i^r \leq 0, \\ \in (0, \infty), & \text{если } 0 < s_i^r < 1, \\ \in (-\infty, -1), & \text{если } s_i^r < -1. \end{cases}$$

Следовательно, если определить характер зависимости агрегата s_i^r от коэффициентов нелинейности окружения u_j , которые зависят от типов функций спроса и издержек и малочувствительны к объемам предложения, и СПВ окружения S_j^{r-1} , которая зависит от ментального типа окружения, то можно оценить влияние этих параметров на СПВ игрока.

Для качественного сравнительного анализа влияния типов функций $P_k(Q), C_m(q)$, и изучения явления бифуркации рассмотрим случай идентичных игроков: для всех игроков окружения коэффициенты нелинейности и СПВ одинаковы, т.е. $u_j = u \forall j \in N, S_j^{r-1} = \sigma \forall j \in N$. В этом случае

$$(8) \quad S_i^r = \frac{n-1}{u+2-\sigma-n}, \quad s_i^r = \frac{n-1}{u-\sigma+1}.$$

Из (7а) и (8) вытекает следующее.

Утверждение 2. Если $u_j = u \forall j \in N, S_j^{r-1} = \sigma \forall j \in N$ то функция СПВ вида $S_i^r(u, \sigma)$

i) *имеет разрыв второго рода при $\sigma = \sigma^0 = u + 2 - n$ (кроме случая линейных функций спроса и издержек), причем*

$$(8a) \quad \lim_{\sigma \rightarrow (u+2-n)-0} S_i^r = \infty, \quad \lim_{\sigma \rightarrow (u+2-n)+0} S_i^r = -\infty;$$

ii) *принадлежит следующим интервалам (кроме случая линейных функций спроса и издержек, в котором $S_i^r \in [-1, 0)$):*

$$(8b) \quad S_i^r \begin{cases} \in (0, \infty), & \text{если } \sigma \in (-\infty, \sigma^0), \\ \in (-\infty, 0), & \text{если } \sigma \in (\sigma^0, \infty). \end{cases}$$

Наглядная иллюстрация бифуркации вытекает из решения системы уравнений равновесия (1) в явном виде, известного для случая линейных функций спроса и издержек. Однако в этом случае не возникает бесконечных значений предположительных вариаций (они ограничены диапазоном $(-1, 0]$). Для степенных функций издержек явное решение не существует [6], поэтому рассмотрим случай линейной функции спроса и квадратичных функций издержек.

Утверждение 3. В случае линейной функции спроса и квадратичных функций издержек общее решение игры (1) имеет вид

$$(9) \quad Q_i^* = \frac{D_i \left[\prod_{j=1 \setminus i}^n (\gamma_j^r - 1) + \sum_{j=1 \setminus i}^n \prod_{\mu=1 \setminus j, i}^n (\gamma_\mu^r - 1) \right] - \sum_{j=1 \setminus i}^n \left[D_j \prod_{\mu=1 \setminus i, j}^n (\gamma_\mu^r - 1) \right]}{\prod_{j=1}^n (\gamma_j^r - 1) + \sum_{j=1}^n \prod_{\mu=1 \setminus j}^n (\gamma_\mu^r - 1)}$$

в частном случае $n = 3$ формула следующая:

$$(9a) \quad Q_i^* = \frac{D_i \left(\prod_{j=1 \setminus i}^3 \gamma_j^r - 1 \right) - \sum_{j=1 \setminus i}^3 \prod_{\mu=1 \setminus i}^3 D_j \gamma_\mu^r + \sum_{j=1 \setminus i}^3 D_j}{\gamma_1^r \gamma_2^r \gamma_3^r - \gamma_1^r - \gamma_2^r - \gamma_3^r + 2},$$

в частном случае $n = 3$ при одинаковых параметрах типа игроков $D = D_i \forall i \in N$:

$$(9b) \quad Q_i^* = D \frac{\prod_{j=1 \setminus i}^3 \gamma_j^r - \sum_{j=1 \setminus i}^3 \gamma_j^r + 1}{\gamma_1^r \gamma_2^r \gamma_3^r - \gamma_1^r - \gamma_2^r - \gamma_3^r + 2},$$

где

$$D_i = \frac{a - B_{1i}}{b}, \quad \gamma_i = 2 + S_i^r + \frac{B_{2i}}{b},$$

символом «*» обозначено игровое равновесие.

При бифуркации представлений одновременно возможны два случая, которые опишем, базируясь на (9б) при таком же условии однотипных игроков окружения, что и в утверждении 2; тогда с учетом (6в) $\gamma_j = \gamma = -u_j + S_j^{r-1} = -u + \sigma$, $j = 2, 3$, причем $\gamma < 0$ при $\sigma = \sigma^0$, поскольку $B_2 > 0$.

Первый случай $S_i^r \rightarrow \infty$ содержательно означает, что для игроков окружения оптимальной стратегией (напомним, что рассматриваются оптимальные предположительные вариации) является бесконечный рост объема предложения, ограниченный параметрами функции спроса $P(Q)$ и производственными возможностями технологии фирм. В этом случае если СПВ окружения S_j^r , $j = N \setminus i$ есть конечные числа, то из (9б) следует, что оптимальный ответ игрока стремится к нулю справа, т.е. $Q_i^{r*} \rightarrow 0 + 0$, т.е. игрок стремится сократить объем предложения до нуля.

Второй случай $S_i^r \rightarrow -\infty$ подразумевает бесконечное сокращение игроками окружения объема предложения, хотя фактически они могут уменьшить предложение только до нуля. Тогда из (9б) следует, что оптимальный ответ игрока стремится к нулю слева, т.е. $Q_i^{r*} \rightarrow 0 - 0$, это можно трактовать как наибольший допустимый ответ игрока на предсказанное им по $S_i^r \rightarrow -\infty$ отрицательное значение суммарного объема предложения.

Интересно, что бифуркация представлений должна приводить на последующих рангах рефлексии к *бифуркации действий*, что также можно показать из формулы оптимальной СПВ (8) и равновесного действия (9б).

Если $S_i^r \rightarrow \infty$, то на следующем $(r + 1)$ -м ранге рефлексии рассмотрим ситуацию со стороны окружения (т.е. при $\sigma \rightarrow \infty$); тогда из (8) следует, что $S_j^{r+1} \rightarrow 0$. Далее, возвращаясь к i -му игроку на ранге $r + 2$, для которого $\sigma \rightarrow 0$, получим также из (8): $\lim_{\sigma \rightarrow 0} s_i^{r+2} = \frac{n-1}{u-\sigma+1} < 0$, поскольку $u < -2$ согласно (6в). Следовательно, $S_i^{r+2} \rightarrow -1$, когда $\sigma \rightarrow \sigma^{00} = u + 1$, и при условии сохранения реакций окружения по типу $S_j^{r+1} \rightarrow 0$ из формулы (9б) следует $Q_1^* \rightarrow \infty$ (поскольку $\gamma = 1$, $Q_1^* = D \frac{\gamma^2 - 2\gamma + 1}{\gamma_1(\gamma^2 - 1) - 2(\gamma - 1)}$). Таким образом, определенная через СПВ бифуркация ментального реагирования приводит к бифуркации равновесия в игре. Эти рассуждения проиллюстрированы на рис. 1 (внизу).

Случай идентичных игроков является основой для сравнительного анализа влияния типов функций спроса и издержек на СПВ. Согласно (8а) с увеличением коэффициентов нелинейности u игроков окружения точка бифуркации σ^0 сдвигается в большую сторону, а с уменьшением u – наоборот, т.е. состояние бифуркации наступает при более высоких значениях СПВ окружения. Из условий (8б) следует, что если коэффициенты нелинейности больше, то СПВ окружения должны быть больше, чтобы S_i^r принадлежала соответствующим диапазонам.

Исследуем характер зависимости СПВ i -го игрока от коэффициента нелинейности u_l некоторого l -го игрока окружения, а также от СПВ окружения и от q, Q .

Утверждение 4. СПВ i -го игрока на r -м ранге рефлексии S_i^r

i) *убывает с возрастанием коэффициента нелинейности l -го игрока окружения u_l и возрастает с увеличением S^{r-1} :*

$$(10a) \quad S_{iul}^{r/} < 0, \quad S_{iS^{r-1}}^{r/} > 0;$$

ii) *в случае линейной функции спроса не зависит от q при линейных и квадратичных функциях издержек окружения, убывает с ростом q для $\beta > 1$ и возрастает с ростом q для $\beta < 1$ при степенных функциях издержек окружения, не зависит от Q при любых функциях издержек:*

$$(10б) \quad S_{iq}^{r/} \Big|_{\substack{k=1 \\ m=1,3}} = S_{iQ}^{r/} \Big|_{\substack{k=1 \\ m=1,2,3}} = 0, \quad S_{iq}^{r/} \Big|_{\substack{k=1 \\ m=2}} \begin{cases} < 0 & \text{при } \beta > 1, \\ > 0 & \text{при } \beta < 1; \end{cases}$$

iii) *в случае степенной функции спроса с ростом q убывает, если $S^{r-1} > -1$ (возрастает, если $S^{r-1} < -1$) при линейных и квадратичных функциях издержек окружения, а для степенных функций издержек убывает при $S^{r-1} > -1$, когда функции издержек выпуклы ($\beta > 1$), и если, кроме того, $\varphi < 1$, когда эти функции вогнуты ($\beta < 1$), а при $S^{r-1} < -1$ возрастает*

для вогнутых функций издержек, а для выпуклых функций убывает, если $\varphi < -1$;

с ростом Q возрастает, если $S^{r-1} > -1$ (убывает, если $S^{r-1} < -1$) для линейных функций издержек и для квадратичных функций (в этом случае убывает при дополнительном условии $\zeta < 1$), для степенных функций издержек возрастает при $S^{r-1} > -1$, когда функции издержек выпуклы ($\beta > 1$), и убывает, если $\psi > 1$, когда эти функции вогнуты ($\beta < 1$), а при $S^{r-1} < -1$ убывает для вогнутых функций издержек, а для выпуклых функций возрастает, если $\psi > -1$:

$$(10B) \quad \begin{aligned} S_i^r / q \Big|_{\substack{k=2 \\ m=1,3}} & \begin{cases} < 0 & \text{при } S^{r-1} > -1, \\ > 0 & \text{при } S^{r-1} < -1, \end{cases} \\ S_i^r / Q \Big|_{\substack{k=2 \\ m=1}} & \begin{cases} > 0 & \text{при } S^{r-1} > -1, \\ < 0 & \text{при } S^{r-1} < -1, \end{cases} \\ S_i^r / q \Big|_{\substack{k=2 \\ m=2}} & \begin{cases} < 0 & \text{если } \varphi < 1 \text{ при } t = 1, \\ < 0 & \text{при } t = 2, \\ > 0 & \text{при } t = 3, \\ < 0 & \text{если } \varphi < -1 \text{ при } t = 4, \end{cases} \\ S_i^r / Q \Big|_{\substack{k=2 \\ m=2}} & \begin{cases} < 0 & \text{если } \psi > 1 \text{ при } t = 1, \\ > 0 & \text{при } t = 2, \\ < 0 & \text{при } t = 3, \\ < 0 & \text{если } \psi > -1 \text{ при } t = 4, \end{cases} \\ S_i^r / Q \Big|_{\substack{k=2 \\ m=3}} & \begin{cases} > 0 & \text{при } S^{r-1} > -1, \\ < 0 & \text{если } \zeta < 1 \text{ при } S^{r-1} < -1; \end{cases} \end{aligned}$$

iii) слабо зависит от объемов предложения игроков по сравнению с влиянием СПВ окружения:

$$(10Г) \quad S_i^r / q \ll S_i^r / S^{r-1},$$

где

$$\varphi = \frac{B_1 \beta (1 - \beta) (2 - \beta) q^{\beta-3}}{A |\alpha| |1 + S^{r-1}| (1 - \alpha) Q^{\alpha-2}}, \quad \psi = \varphi \frac{1 - \alpha}{2 - \beta}, \quad \zeta = \frac{B_2 Q^{2-\alpha}}{A |\alpha| |1 + S^{r-1}| q},$$

и введены обозначения

$$\begin{aligned} t = 1: & S^{r-1} > -1 \wedge \beta < 1, & t = 2: & S^{r-1} > -1 \wedge \beta > 1, \\ t = 3: & S^{r-1} < -1 \wedge \beta < 1, & t = 4: & S^{r-1} < -1 \wedge \beta > 1. \end{aligned}$$

Сравним значения координаты точки бифуркации для различных функций спроса и издержек.

Утверждение 5. При различных типах функций спроса и издержек окружения для точки бифуркации σ^0 выполняются следующие соотношения:

$$(11a) \quad \sigma_{23}^0 > \sigma_{21}^0,$$

$$(11б) \quad \sigma_{22}^0 > \sigma_{21}^0 \text{ при } \beta > 1,$$

$$(11в) \quad \sigma_{21}^0 > \sigma_{12}^0 \text{ при } B_1 > \bar{B}_1,$$

$$(11г) \quad \sigma_{21}^0 > \sigma_{13}^0 \text{ при } B_2 < \bar{B}_2,$$

$$(11д) \quad \sigma_{12}^0 > \sigma_{22}^0 \text{ при } B_1 < \bar{B}_1, \text{ если } \beta > 1 \text{ или при } B_1 > \bar{B}_1 \text{ если } \beta < 1,$$

$$(11е) \quad \sigma_{13}^0 < \sigma_{23}^0 \text{ при } B_2 < \bar{B}_2,$$

$$(11ж) \quad \sigma_{12}^0 > \sigma_{13}^0 \wedge \sigma_{22}^0 > \sigma_{23}^0 \text{ при } \beta > 1 \text{ и } \frac{B_1}{B_2} > \frac{1}{\lambda},$$

где

$$\bar{B}_1 = b \frac{\delta}{\lambda}, \quad \bar{B}_2 = b\delta, \quad \bar{B}_1 = \frac{\delta}{\lambda}(\chi - b), \quad \bar{B}_2 = \delta \frac{\chi b}{\chi - b},$$

$$\delta = (1 + S^{t-1})(1 - \alpha) \frac{q}{Q}, \quad \chi = A|\alpha|Q^{\alpha-1} > 0, \quad \lambda = \beta(\beta - 1)q^{\beta-2}.$$

Соотношения для точки бифуркации в случаях других типов функций спроса и издержек окружения представлены в Приложении.

4. Выводы

Утверждение 2 показывает, что бифуркация представлений игроков происходит, когда СПВ окружения возрастает с уровня $\sigma = u + 2 - n - 0$ до $\sigma = u + 2 - n + 0$; кроме того, с увеличением числа игроков для дестабилизации равновесия необходимо большее по модулю значение СПВ, так как координата точки бифуркации уменьшается с ростом n .

Утверждение 4 раскрывает следующие основные факторы, влияющие на СПВ игрока. Во-первых, действует фактор рыночно-технологической обстановки игры, определяемый коэффициентом нелинейности: чем больше коэффициент нелинейности игроков окружения, тем меньше СПВ, т.е. больше модуль СПВ; учитывая, что, как правило, СПВ отрицательна, *рост модуля СПВ свидетельствует об усилении реагирования игрока*. Поэтому комбинации функций спроса и издержек, приводящие к более высоким значениям коэффициента нелинейности, способствуют усилению реагирования игрока. К таким случаям, в частности, относятся игры с квадратичными функциями издержек или степенными функциями при положительном эффекте масштаба ($\beta < 1$), которые ведут к большим значениям коэффициента нелинейности по сравнению с линейной моделью издержек независимо от модели спроса, что показано в Приложении.

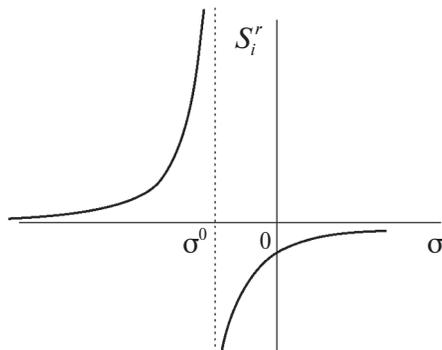


Рис. 2. Зависимость СПВ игрока от СПВ окружения.

Во-вторых, наблюдается свойство *симметричности реагирования* игроков, т.е. чем больше СПВ окружения, тем больше СПВ игрока. Этот консонанс реагирования игроков, качественно проиллюстрированный на рис. 2, выражается в двухэтапном процессе. Если окружение имеет отрицательные СПВ, то их увеличение (уменьшение по модулю) сопровождается ростом положительной СПВ игрока ($S_i^r \rightarrow \infty$), т.е. в терминах экономики игрок предполагает экспансию окружения и в результате, по формуле (9б), будет сокращать объем предложения вплоть до нуля. Тогда наступает момент бифуркации, и процесс меняет ход на противоположный, поскольку из формулы (8) следует, если ее обратить на окружение, $S_j^{r+1} = \frac{n-1}{u+2-S_i^r-n}$, что приводит к $S_j^{r+1} \rightarrow 0$, т.е. окружение предполагает нереагирование игрока. Но в ответ на это (рис. 2) СПВ игрока снова возрастает, т.е. $S_j^{r+2} \rightarrow -1$, что побуждает игрока увеличивать объем предложения.

В-третьих, наибольшее влияние на СПВ игрока оказывают СПВ и типы функций спроса и издержек окружения. Несмотря на то, что СПВ игрока зависит от его объема предложения и суммарного объема предложения игроков через коэффициенты нелинейности окружения (для нелинейных функций), это влияние несопоставимо мало с воздействием ментальных типов окружения, обусловленных его уровнями лидерства.

Утверждение 5 определяет следующие свойства бифуркации.

Случай *степенной функции спроса* приводит к большему значению точки бифуркации при квадратичной функции издержек ($k = 2, m = 3$), чем при линейной функции издержек ($k = 2, m = 1$), поскольку квадратичная функция моделирует отрицательный эффект масштаба. Аналогично случай степенной функции спроса обуславливает превышение координаты точки бифуркации при степенной функции издержек ($k = 2, m = 2$) для отрицательного эффекта масштаба $\beta > 1$ над соответствующей координатой при линейной функции издержек ($k = 2, m = 1$), а при положительном эффекте – наоборот.

Случай *степенной функции спроса и линейных издержек* ($k = 2, m = 1$) по сравнению с различными вариантами издержек для линейной функции

спроса ($m = 2, 3$) ведет к повышению точки бифуркации при определенных значениях коэффициентов B_1, B_2 :

i) если $\bar{B}_1 < 0$, т.е. для положительного эффекта масштаба при $S^{r-1} < -1$ и для отрицательного эффекта масштаба при $S^{r-1} > -1$, поскольку

$$\bar{B}_1 = \frac{b(1+S^{r-1})(1-\alpha)}{\beta(\beta-1)Qq^{\beta-3}} \begin{cases} > 0, & \text{если } (\beta > 1 \wedge S^{r-1} > -1) \vee (\beta < 1 \wedge S^{r-1} < -1), \\ < 0, & \text{если } (\beta < 1 \wedge S^{r-1} < -1) \vee (\beta > 1 \wedge S^{r-1} > -1); \end{cases}$$

то действие эффекта масштаба как технологического типа игроков противоположно действию СПВ окружения как ментального типа игроков;

ii) если $\bar{B}_1 > 0$ и $B_1 > \bar{B}_1$, т.е. при высоком темпе роста степенной функции;

iii) если $\bar{B}_2 > 0$, т.е. при $S^{r-1} > -1$, поскольку $\bar{B}_2 > 0 = b(1+S^{r-1})(1-\alpha)\frac{q}{Q}$.

Случай *степенных функций издержек* ($m = 2$) по сравнению с вариантами *квадратичных функций издержек* ($m = 3$) для любых функций спроса ($k = 1, 2$) обуславливает следующие соотношения для точки бифуркации:

i) точка бифуркации при степенных издержках больше, если эффект масштаба отрицательный ($\beta > 1$), при $B_2 \ll B_1$, поскольку из $\frac{B_1}{B_2} > \frac{1}{\lambda}$ следует $B_1\beta(\beta-1)q^{\beta-2} > B_2$, а множитель $\beta(\beta-1)q^{\beta-2} \ll 1$;

ii) точка бифуркации при степенных издержках меньше, если эффект масштаба положительный ($\beta < 1$), так как при этом $B_1\beta(\beta-1)q^{\beta-2} < 0$.

Случай *квадратичных издержек* ($m = 3$) при линейной ($k = 1$) и степенной ($k = 2$) функциях спроса демонстрирует две возможности, показывая, что усиление реагирования окружения компенсирует влияние нелинейности функции спроса:

i) точка бифуркации при степенных издержках больше, если $S^{r-1} > -1$ и B_2 достаточно мало ($B_2 < \bar{B}_2$), так как $\bar{B}_2 = \frac{b(1+S^{r-1})(1-\alpha)A|\alpha|qQ^{\alpha-2}}{A|\alpha|Q^{\alpha-1}-b} > 0$, если $A \gg b$;

ii) точка бифуркации при степенных издержках меньше, если $S^{r-1} > -1(\bar{B}_2 < 0)$.

5. Заключение

Рыночно-технологическая обстановка игры олигополии описывается сочетанием функции рыночного спроса и функций издержек игроков, которые в совокупности определяют их функции полезности. На основе анализа многообразия таких сочетаний, возникающих в различных прикладных задачах моделирования олигополии, исследование показало важность рыночно-технологической обстановки игры олигополии для стабильности игрового равновесия. Причина дестабилизации равновесия, или бифуркации действий игроков, оказалась в бифуркации их представлений, когда игрок при определенной констелляции представлений игроков окружения может оценивать их оптимальную реакцию как положительную и отрицательную одновременно. В свою очередь, указанная констелляция представлений игроков предопре-

делена уровнями их лидерства по Штакельбергу и выражается некоторым значением СПВ окружения, которое можно назвать точкой бифуркации.

Координата точки бифуркации зависит от числа игроков и коэффициента нелинейности их функций полезности, а коэффициент нелинейности определяется типами функций спроса и издержек. Если для конкретного сочетания функций спроса и издержек игроков точка бифуркации больше (т.е. СПВ окружения меньше по модулю), то игровая обстановка более чувствительна к изменению ментальных типов игроков, т.е. игровое равновесие в динамике может быть легче дестабилизировано.

Характерно, что при линейных функциях спроса и издержек дестабилизация равновесия невозможна. Поэтому в реальных играх олигополии с линейными зависимостями рыночно-технологических параметров будут наблюдаться постепенные изменения равновесных действий, что зачастую наблюдается на практике.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. В [6] параметр u_i представляет собой² компонент условия второго порядка экстремума функции полезности игрока, т.е. $\Pi''_{iQ_iQ_i} = u_i - S_i^{r-1} < 0$. На основе (1) запишем это условие $P'_{Q_i} + (1 + S_i^{r-1})P'_Q + (1 + S_i^{r-1})Q_i P''_{QQ_i} - C''_{iQ_iQ_i} < 0$, затем учитывая, что $P'_Q < 0$, это неравенство разделим на $|P'_Q|$: $\frac{P'_{Q_i}}{|P'_Q|} - 1 - S_i^{r-1} + \frac{(1+S_i^{r-1})Q_i P''_{QQ_i}}{|P'_Q|} - \frac{C''_{iQ_iQ_i}}{|P'_Q|} < 0$, откуда следует (2а).

Доказательство утверждения 3. Уравнения (1) при (3а), (4в) имеют вид

$$a - bQ - b(1 + S_i^r)Q_i - B_{2i}Q_i - B_{1i} = 0,$$

или

$$\gamma_i Q_i + \sum_{j=N \setminus i} Q_j q_{-i} = D_i, \quad i \in N;$$

решение этой системы методом Крамера приводит к (9).

Доказательство утверждения 4. В результате дифференцирования формулы (7), обозначив $z_j^{r-1} = \frac{1}{u_j - S_j^{r-1} + 1}$, получим:

$$(II.1) \quad S_i^{r/u_i} = \left(\frac{1}{S_i^r} - 1 \right) (s_i^r)^{-2} (z_j^{r-1})'_{u_i} = -(1 - s_i^r)^{-2} (u_i - S_i^{r-1} + 1)^{-2} < 0,$$

$$(II.2) \quad S_i^{r/q} = S_i^{r/u_i} u'_{lq}, \quad S_i^{r/Q} = S_i^{r/u_i} u'_{lQ}, \quad S_i^{r/S_{r-1}} > 0, \quad S_i^{r/u_i} < 0.$$

² В [6] параметр имеет вид $u_i = -2 - \frac{C''_{iQ_iQ_i}}{b}$, так как выведен при линейной функции спроса, для которой $P'_Q = P'_{Q_i} = -b$.

Для упрощения анализа формул (6) введем следующие обозначения:

$$(П.3) \quad \delta = (1 + S^{r-1})(1 - \alpha) \frac{q}{Q} \begin{cases} > 0 & \text{при } S^{r-1} > -1, \\ < 0 & \text{при } S^{r-1} < -1, \end{cases} \quad \chi = A|\alpha|Q^{\alpha-1} > 0, \\ \lambda = \beta(\beta - 1)q^{\beta-2} \begin{cases} < 0 & \text{при } \beta < 1, \\ > 0 & \text{при } \beta > 1. \end{cases}$$

Кроме того, введем обозначения x, y, z, X, Y, Z для $u_{km}, k = 1, 2, m = 1, 2, 3$, с учетом которых формулы (6) трансформируются к виду:

$$(П.4а) \quad x = u_{11} = -2, \quad X = u_{21} = -2 + \delta,$$

$$(П.4б) \quad y = u_{12} = -2 - \frac{B_1}{b}\lambda, \quad Y = u_{22} = -2 + \delta - \frac{B_1}{\chi}\lambda,$$

$$(П.4в) \quad z = u_{13} = -2 - \frac{B_2}{b}, \quad Z = u_{23} = -2 + \delta - \frac{B_2}{\chi}.$$

Анализ формул (П.3), (П.4) показывает, что в зависимости от значений параметров β и S^{r-1} возможно четыре случая, номера которых обозначим символом t : 1) $t = 1$: $S^{r-1} > -1 \wedge \beta < 1$, в этом случае $\delta > 0 \wedge \lambda < 0$; 2) $t = 2$: $S^{r-1} > -1 \wedge \beta > 1$, при этом $\delta > 0 \wedge \lambda > 0$; 3) $t = 3$: $S^{r-1} < -1 \wedge \beta < 1$, при этом $\delta < 0 \wedge \lambda < 0$; 4) $t = 4$: $S^{r-1} < -1 \wedge \beta > 1$, при этом $\delta < 0 \wedge \lambda > 0$.

Дифференцируя (П.4) получим:

$$(П.5) \quad \begin{aligned} x'_q = z'_q = 0, \quad X'_q = Z'_q = \frac{\delta}{q}, \\ y'_q = -\frac{B_1\lambda}{bq}(\beta - 2), \quad Y'_q = \frac{\delta}{q} - \frac{B_1\lambda}{\chi q}(\beta - 2), \end{aligned}$$

$$(П.6) \quad \begin{aligned} x'_Q = y'_Q = z'_Q = 0, \quad X'_Q = -\frac{\delta}{Q}, \\ Y'_Q = -\frac{\delta}{Q} - \frac{B_1\lambda}{\chi q}(\beta - 2), \quad Z'_Q = -\frac{\delta}{Q} - \frac{B_2}{\chi Q}(1 - \alpha). \end{aligned}$$

Из этих формул с учетом (П.2) и (П.3) следует:

1) при линейной функции спроса ($k = 1$)

$$S_{i q}^{r/} \Big|_{\substack{k=1 \\ m=1,3}} = S_{i q}^{r/} \Big|_{\substack{k=1 \\ m=1,3}} = 0, \quad S_{i q}^{r/} \Big|_{\substack{k=1 \\ m=2}} \begin{cases} < 0 & \text{при } \beta > 1, \\ > 0 & \text{при } \beta < 1, \end{cases}$$

2) при степенной функции спроса ($k = 2$) $Y'_q > 0$, т.е. с учетом (П.1)

$S_{i q}^{r/} \Big|_{\substack{k=2 \\ m=2}} < 0$, если $\delta + \frac{B_1\lambda}{\chi}(2 - \beta) > 0$, и это неравенство приводит к четырем

случаям: при $t = 1$ получается неравенство $1 > -\frac{B_1\lambda}{\chi\delta}(2 - \beta)$, что после подстановки (П.3) приводит к $1 > \varphi = \frac{B_1\beta(1-\beta)(2-\beta)q^{\beta-3}}{A|\alpha||1+S^{r-1}||1-\alpha|Q^{\alpha-2}}$; при $t = 2$ неравенство такое же и $\varphi < 0$, т.е. $Y'_q > 0$ без дополнительных условий; при $t = 3$

имеет место $\delta + \frac{B_1\lambda}{\chi}(2 - \beta) < 0$, поэтому $Y_q' < 0$; при $t = 4$ получаем $Y_q' > 0$ при $\varphi < -1$; производные $Y_Q' > 0$, $Z_Q' > 0$, анализируются аналогично.

Сравним $S_i^{r'/S^{r-1}}$ и $S_i^{r'/q}$ по абсолютной величине, заметив, что

$$S_i^{r'/S^{r-1}} = (1 - s_i^r)^{-2}(u_i - S_i^{r-1} + 1)^{-2}, \quad S_i^{r'/q} = (1 - s_i^r)^{-2}(u_i - S_i^{r-1} + 1)^{-2}u_i^{1/q}.$$

Из (П.5) следует, что

$$\begin{aligned} u_{11q}' &= u_{13q}' = 0, \quad u_{21q}' = u_{23q}' = (1 + S^{r-1})(1 - \alpha)\frac{1}{Q}, \\ u_{12q}' &= \frac{B_1}{b}(\beta - 2)\beta(\beta - 1)q^{\beta-3}, \\ u_{22q}' &= (1 + S^{r-1})(1 - \alpha)\frac{1}{Q} - \frac{B_1}{A|\alpha|Q^{\alpha-1}}(\beta - 2)\beta(\beta - 1)q^{\beta-3}. \end{aligned}$$

Очевидно, что $\lim_{q \rightarrow \infty} u_i^{1/q} \rightarrow 0$, поэтому $S_i^{r'/q} \ll S_i^{r'/S^{r-1}}$.

Доказательство утверждения 5. Для линейных и квадратичных функций издержек при любых значениях их параметров верны следующие соотношения:

$$x > z, \quad X > Z.$$

В остальных случаях коэффициенты нелинейности удовлетворяют следующим соотношениям: $x < X$ при $S^{r-1} > -1$, $x < y$ при $\beta < 1$, $x < Y$ при $B_1 < \bar{\bar{B}}_1$, $x < Z$ при $B_2 < \bar{\bar{B}}_2$, $X < Y$ при $\beta > 1$, $X < y$ при $B_1 > \bar{B}_1$, $X < z$ при $B_2 < \bar{B}_2$, $y < Y$ при $B_1 < \bar{B}_1$ если $\beta > 1$, или при $B_1 > \bar{B}_1$ если $\beta < 1$, $z < Z$ при $B_2 < \bar{B}_2$, $y < z$ при $\beta > 1$ и $\frac{B_1}{B_2} > \frac{1}{\lambda}$, $Y < Z$ при $\beta > 1$ и $\frac{B_1}{B_2} > \frac{1}{\lambda}$, $Y < Z$ при $\beta > 1$ и $\frac{B_1}{B_2} > \frac{1}{\lambda}$, где $\bar{\bar{B}}_1 = \delta\frac{\chi}{\lambda}$, $\bar{B}_1 = b\frac{\delta}{\lambda}$, $\bar{\bar{B}}_2 = \delta\chi$, $\bar{B}_2 = b\delta$, $\bar{\bar{B}}_1 = \frac{\delta}{\lambda}(\chi - b)$, $\bar{B}_2 = \delta\frac{\chi b}{\chi - b}$. Поскольку из (10а) следует, что чем больше u_{km} , тем меньше S_{ikm}^r , то получим из этих соотношений неравенства для σ_{km}^0 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bowley A.L.* The Mathematical Groundwork of Economics. Oxford: Oxford Unvers. Press, 1924.
2. *Джейлс Дж.А., Рени Ф.Дж.* Микроэкономика. Продвинутый уровень. М.: ИД ГУ ВШЭ, 2011.
3. *Singh N., Vives X.* Price and Quantity Competition in a Differential Duopoly // Rand J. Econom. 1984. V. 15. P. 546–554.
4. *Daughety A.* Reconsidering Cournot: The Cournot Equilibrium is Consistent // Rand J. Econom. 1985. V. 16. P. 368–380.
5. *Julien L.A.* On noncooperative oligopoly equilibrium in the multiple leader-follower game // Europ. J. Operat. Res. 2017. V. 256. No. 2. P. 650–662.
6. *Гераськин М.И.* Свойства предположительных вариаций в нелинейной модели олигополии Штакельберга // АиТ. 2020. № 6. С. 105–130.
Geraskin M.I. The Properties of Conjectural Variations in the Nonlinear Stackelberg Oligopoly Model. Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 6. P. 1051–1072.

7. *Kalashnikov V.V., Bulavsky V.A., Kalashnykova N.I.* Existence of the Nash-optimal strategies in the meta-game // *Stud. Syst. Decis. Control.* 2018. No. 100. P. 95–100.
8. *Kalashnykova N., Kalashnikov V., Watada J., Anwar T., Lin P.* Consistent Conjectural Variations Equilibrium in a Mixed Oligopoly Model with a Labor-Managed Company and a Discontinuous Demand Function // *IEEE Access.* 2022. P. 1–1.
9. *Aizenberg N.I., Zorkal'tsev V.I., Mokryi I.V.* Study of Unsteady Oligopoly Markets // *J. Appl. Industr. Math.* 2017. Vol. 11. No. 1. P. 8–16.
10. *Алгазин Г.И., Алгазина Ю.Г.* К аналитическому исследованию условий сходимости процессов рефлексивного коллективного поведения в моделях олигополии // *АиТ.* 2022. № 3. С. 84–109.
Algazin G.I., Algazina Y.G. To the Analytical Investigation of the Convergence Conditions of the Processes of Reflexive Collective Behavior in Oligopoly Models // *Autom. Remote Control.* 2022. V. 83. No. 3. P. 367–388.
11. *Fedyanin D.N.* Monotonicity of equilibriums in Cournot competition with mixed interactions of agents and epistemic models of uncertain market // *Proc. Comp. Sci.* 2021. No. 186. P. 411–417.
12. *Lo C.F., Yeung C.F.* Quantum Stackelberg oligopoly // *Quantum Inform. Proc.* 2022. V. 21. No. 3. P. 85.
13. *Ougolnitsky G., Gorbaneva O.* Sustainability of Intertwined Supply Networks: A Game-Theoretic Approach // *Games.* 2022. V. 13. No. 3. P. 35.
14. *Угольницкий Г.А., Усов А.Б.* Сравнительный анализ эффективности способов организации взаимодействия экономических агентов в моделях дуополии Курно с учетом экологических условий // *АиТ.* 2023. № 2. С. 150–168.
15. *Филатов А.Ю.* Неоднородность поведения фирм на олигопольном рынке: стратегические фирмы и ценополучатели // *Изв. Иркут. гос. ун-та* 2015. Т. 13. С. 72–83.
16. *Cornes R., Fiorini L.C., Maldonado W.L.* Expectational stability in aggregative games // *J. Evolut. Econom.* 2021. V. 31. No. 1. P. 235–249.
17. *Geras'kin M.I., Chkhartishvili A.G.* Structural modeling of oligopoly market under the nonlinear functions of demand and agents' costs // *Autom. Remote Control.* 2017. V. 78. No. 2. P. 332–348.
18. *Kanieski da Silva B., Tanger S., Marufuzzaman M., Cubbage F.* Perfect assumptions in an imperfect world: Managing timberland in an oligopoly market // *Forest Policy Econ.* 2022. No. 137. P. 102691.
19. *Zhou X., Pei Z., Qin B.* Assessing Market Competition in the Chinese Banking Industry Based on a Conjectural Variation Model // *China and World Economy.* 2021. V. 29. No. 2. P. 73–98.
20. *Novikov D.A., Chkhartishvili A.G.* Reflexion and Control: Mathematical Models. London: CRC Press, 2014.
21. *Novshek W.* On the Existence of Cournot Equilibrium // *Rev. Econ. Stud.* 1985. No. 52. P. 85–98.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.А. Новиковым.

Поступила в редакцию 31.10.2023

После доработки 27.02.2024

Принята к публикации 30.04.2024